Riordinamento di serie a valori reali

Definizione 1 *Un* **riordinamento** *di una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *è una serie della forma* $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma_k}$*, dove* σ *è una permutazione di* $\mathbb{N}$*, ossia,* $\sigma : k \in \mathbb{N} \mapsto \sigma_k \in \mathbb{N}$ *è una applicazione iniettiva e suriettiva.*

In altri termini, un riordinamento di una serie reale $\sum a_n$, è una serie ottenuta 'commutando' i termini a_n: ovviamente, nel caso la serie sia una somma finita, per la proprietà commutativa, il risultato della somma non varia. Questo fatto rimane vero per tutte le serie *assolutamente convergenti o a termini positivi*:

Proposizione 2 (i) *Il valore (finito o infinito) di una serie a termini positivi non cambia riordinando la serie.*
(ii) *Riordinando una serie reale assolutamente convergente si ottiene una serie assolutamente convergente con lo stesso valore della serie data.*

Dimostrazione (i): siano $a_k \geq 0$ e sia σ una qualunque permutazione di $\mathbb{N}$. Si fissi $n \in \mathbb{N}$. Essendo σ biunivoca, esistono numeri naturali $j_1 < \cdots < j_n$ tali che $\sigma_{j_k} = k$ per ogni $1 \leq k \leq n$. Dunque

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma_{j_k}} \leq \sum_{j=1}^{j_n} a_{\sigma_j} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \,,$$

da cui segue la tesi.
(ii): sia $\sum a_n$ una serie assolutamente convergente e sia σ una qualunque permutazione di $\mathbb{N}$. La tesi segue dal punto (i) osservando che[1]

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{\sigma_j}^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \,, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} a_{\sigma_j}^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \,. \qquad \blacksquare$$

Le cose, però, cambiano completamente nel caso di serie convergenti ma *non* assolutamente convergenti (ossia, nel caso di serie 'condizionatamente convergenti'):

Proposizione 3 (Teorema della serie di Riemann) *Data una serie condizionatamente convergente e dato un qualunque elemento di* $\mathbb{R}^*$*, esiste un riordinamento della serie convergente a tale elemento.*

Dimostrazione Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie condizionatamente convergente e $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Osserviamo, innanzitutto, che dalle ipotesi segue che[2]

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \,.$$

Siano $\{\overline{\sigma}_j\}$ e $\{\underline{\sigma}_j\}$ le due successioni strettamente crescenti a valori in $\mathbb{N}$ tali che:

$$\overline{N} := \{n \in \mathbb{N} \big| \, a_n \geq 0\} =: \{\overline{\sigma}_j \big| \, j \in \mathbb{N}\} \,, \qquad \underline{N} := \{n \in \mathbb{N} \big| \, a_n < 0\} =: \{\underline{\sigma}_j \big| \, j \in \mathbb{N}\} \,;$$

ossia $\{a_{\overline{\sigma}_j}\}$ sono tutti i termini non negativi della serie (ordinati con indice crescente), mentre $\{a_{\underline{\sigma}_j}\}$ sono tutti i termini negativi (ordinati con indice crescente). Chiaramente, $\overline{N} \cap \underline{N} = \varnothing$ e $\overline{N} \cup \underline{N} = \mathbb{N}$.

---

[1] Si ricordi che $x^{\pm} := (|x| \pm x)/2$ denota la parte positiva/negativa di x e che: $|x| = x^+ + x^-$ e che $x = x^+ - x^-$.

[2] Infatti, se, ad esempio, fosse $\sum a_n^+ < +\infty$, allora si avrebbe anche $\sum a_n^- = \sum a_n - \sum a_n^+ \in \mathbb{R}$ e quindi $\sum |a_n| = \sum (a_n^+ + a_n^-) < +\infty$ contrariamente alle ipotesi fatte.

Supponiamo, ora, che $\lambda \in \mathbb{R}$ e costruiamo ricorsivamente una permutazione σ di $\mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{\sigma_j} = \lambda\,. \tag{1}$$

Primo passo: poniamo[3]:

$$\begin{aligned}
&\bar n_1 := \min\Big\{n\geq 1 \big| \sum_{j=1}^{n} a_{\bar\sigma_j} > \lambda\Big\}\,; \qquad S_1 := \sum_{j=1}^{\bar n_1} a_{\bar\sigma_j}\,;\\
&n_1 := \bar n_1\,; \qquad \sigma_j := \overline{\sigma}_j\,,\ \forall\ 1\leq j\leq \bar n_1\,.
\end{aligned}$$

Si noti che, da tali definizioni segue che[4]:

$$S_1 = \sum_{j=1}^{n_1} a_{\sigma_j}\,, \qquad \lambda < S_1 \leq \lambda + a_{\sigma_{n_1}}\,.$$

Secondo passo: poniamo[5]:

$$\begin{aligned}
&\underline{n}_1 = \min\Big\{n\geq 1 \big| S_1 + \sum_{j=1}^{n} a_{\underline{\sigma}_j} < \lambda\Big\}\,; \qquad S_2 := S_1 + \sum_{j=1}^{\underline{n}_1} a_{\underline{\sigma}_j}\,;\\
&n_2 := \bar n_1 + \underline{n}_1\,; \qquad \sigma_{\bar n_1 + j} := \underline{\sigma}_j\,,\ \forall\ 1\leq j\leq \underline{n}_1\,.
\end{aligned}$$

Si noti che, da tali definizioni segue che:

$$S_2 = \sum_{j=1}^{n_2} a_{\sigma_j}\,, \qquad \lambda + a_{\sigma_{n_2}} \leq S_2 < \lambda\,.$$

Terzo passo: poniamo

$$\begin{aligned}
&\bar n_2 := \min\Big\{n\geq \bar n_1 \big| S_2 + \sum_{j=\bar n_1+1}^{n} a_{\bar\sigma_j} > \lambda\Big\}\,; \qquad S_3 := S_2 + \sum_{j=\bar n_1+1}^{\bar n_2} a_{\bar\sigma_j}\,;\\
&n_3 := \underline{n}_1 + \bar n_2\,; \qquad \sigma_{n_2+j} := \overline{\sigma}_j\,,\ \forall\ \bar n_1 + 1\leq j\leq \bar n_2\,.
\end{aligned}$$

Si noti che, da tali definizioni segue che:

$$S_3 = \sum_{j=1}^{n_3} a_{\sigma_j}\,, \qquad \lambda < S_3 \leq \lambda + a_{\sigma_{n_3}}\,.$$

Iterando tale costruzione, otteniamo una successione strettamente crescente $\{n_k\}$, una permutazione σ di $\mathbb{N}$ e una successione $\{S_k\}$ tali che, per ogni $k\in\mathbb{N}$,

$$S_k = \sum_{j=1}^{n_k} a_{\sigma_j}\,, \quad S_{2k} < \lambda < S_{2k-1}\,, \quad |\lambda - S_k| = |a_{\sigma_{n_k}}|\,.$$

Poiché $\sum a_n$ è convergente, $a_n \to 0$ e quindi $S_n \to \lambda$, ossia, vale (1).

[3] Tale $\bar n_1 \in \mathbb{N}$ esiste poiché $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} a_{\bar\sigma_j} = \sum_{1}^{\infty} a_n^+ = +\infty$.

[4] Per definizione di $n_1 = \bar n_1$, $\displaystyle\Big(\sum_{j=1}^{n_1} a_{\sigma_j}\Big) - a_{\sigma_{n_1}} \leq \lambda$.

[5] Tale $\underline{n}_1 \in \mathbb{N}$ esiste poiché $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} a_{\underline{\sigma}_j} = \sum_{1}^{\infty} a_n^- = -\infty$.

La costruzione nel caso $\lambda = \pm\infty$, è del tutto simile e viene lasciata per esercizio[6]. $\blacksquare$

Esercizio Dimostrare che se $\sum a_n$ è condizionatamente convergente, allora per ogni successione $\{\lambda_k\}$ di numeri reali, esiste una successione strettamente crescente $\{n_k\}$ a valori in $\mathbb{N}$ e una permutazione σ di $\mathbb{N}$ tale che[7]

$$\sum_{j=1}^{n_k} a_{\sigma_j} \sim \lambda_k \,.$$

[6]Ad esempio, nel caso $\lambda = +\infty$, si possono costruire una successione strettamente crescente $\{n_k\}$, una permutazione σ di $\mathbb{N}$ e una successione $\{S_k\}$ tali che, per ogni $k \in \mathbb{N}$, $S_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{n_{k+1}} a_{\sigma_j}$, $\quad S_{2k} < k < S_{2k-1}$, $\quad |\lambda - S_k| = |a_{\sigma_{n_k}}|$, il che, naturalmente, implica che $S_k \to +\infty$.

[7]Si ricorda che $\{a_k\} \sim \{b_k\}$ significa che $\lim \dfrac{a_k}{b_k} = 1$.